セカント法の収束オーダーへの検討

TA：于 慧

セカント法では、以下の反復式を使って、$f(x)=0$ の近似解を計算する。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{2.1}$$

次に、$f(x)=0$ の一つの解を α とし、即ち $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ 且つ $x_n \neq \alpha$ と仮定して、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^r} = \lambda \tag{2.2}$$

を満たす r を求める。

(2.2) を導くために、(2.1) の両辺に α を引いて、

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{2.3}$$

となる。$f(x_n)$と $f(x_{n-1})$ の α での $Taylor$ 展開を考えると、

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n-\alpha) + \frac{1}{2}f''(\alpha)(x_n-\alpha)^2 + O((x_n-\alpha)^3)$$

$$f(x_{n-1}) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_{n-1}-\alpha) + \frac{1}{2}f''(\alpha)(x_{n-1}-\alpha)^2 + O((x_{n-1}-\alpha)^3)$$

と表される。$O((x_n-\alpha)^3)$ と $O((x_{n-1}-\alpha)^3)$ は十分小さいので、無視できる。
以下の検討では、符号「≈」は、$n\to\infty$ の時、式が等式となるということを表している。
$Taylor$ 展開の結果を (2.3) に代入して、また $f(\alpha)=0$ より、

$$x_{n+1} - \alpha \;\approx\; (x_n-\alpha)\frac{\frac{1}{2}f''(\alpha)(x_{n-1}-\alpha)}{f'(\alpha)+\frac{1}{2}f''(\alpha)(x_n+x_{n-1}-2\alpha)} \tag{2.4}$$

となる。$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ なので、$\frac{1}{2}f''(\alpha)(x_n+x_{n-1}-2\alpha)$ は $f'(\alpha)$ に比べて無視できる。よって、(2.4) は

$$x_{n+1} - \alpha \approx (x_n-\alpha)\frac{f''(\alpha)(x_{n-1}-\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

となる。$E_n := x_n - \alpha$、$M := f''(\alpha)/2f'(\alpha)$ とおくと、

$$E_{n+1} \approx M E_n E_{n-1} \tag{2.5}$$

となる。また、$(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)^r = E_{n+1}/E_n^r \approx \lambda$ より、

$$E_{n+1} \approx \lambda E_n^r \tag{2.6}$$

$$E_n \approx \lambda E_{n-1}^r, \text{i.e.}, E_{n-1} \approx (\frac{1}{\lambda} E_n)^{\frac{1}{r}} \tag{2.7}$$

は成り立つ。(2.6) と (2.7) を (2.5) に代入して、

$$\lambda E_n^r \approx M(\frac{1}{\lambda})^{\frac{1}{r}} E_n^{\frac{1}{r}} E_n$$

となる。また、$B := M(\frac{1}{\lambda})^{\frac{1}{r}}$ とおくと、

$$\lambda E_n^r \approx B E_n^{\frac{1+r}{r}}$$

となる。

$$E_n^{r-1-\frac{1}{r}} \approx \frac{B}{\lambda}$$

が得られる。右辺の $\frac{B}{\lambda}$ は定数なので、

$$r - 1 - \frac{1}{r} = 0 \Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{（正の根は収束オーダーである）}$$

以上より、セカント法の収束オーダーが $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であることは示された。